Міністерство освіти й науки України
Львівський національний університет ім. І. Франка
Факультет електроніки та комп’ютерних технологій

Кафедра радіофізики та
комп’ютерних технологій

# Курсова робота

на тему:

«Порівняння реалізацій адаптивних цифрових фільтрів
на основі рекурентних нейронних мереж»

Виконав:
Студент групи ФЕІм-11с
Нестеренко В. В.
Науковий керівник:
доц. Любунь З. М.

Львів-2020

## Анотація

У цій кваліфікаційній роботі було розглянуто теорію цифрових фільтрів та можливість їх реалізації за допомогою нейронних мереж. Для теоретичного обґрунтування актуальності обраної проблематики було здійснено огляд тенденцій наукових досліджень у близьких сферах. Було проведено детальний аналіз методів побудови рекурентних цифрових фільтрів першого та другого порядків з використанням елементів нейронних мереж. Для об’єктивного порівняння побудованих моделей фільтрів було підготовано кілька видів сигналів, які було використано для тренування та тестування.

В ході виконання практичної роботи було реалізовано моделі цифрових фільтрів першого та другого порядку з використанням елементів нейронних мереж та проведено їх аналіз. Також було створено дослідницьке середовище на основі jupyter-ноутбука для проведення тренування та тестування розроблених моделей фільтрів.

## Abstract

In this qualification work, the theory of digital filters and the possibility of their implementation using neural networks were considered. In order to theoretically substantiate the relevance of the chosen issue, a review of research trends in related areas was carried out. A detailed analysis of methods for constructing recurrent digital filters of the first and second orders using elements of neural networks was carried out. For an objective comparison of the built filter models, several types of signals were prepared and used for training and testing.

During the practical work, models of first- and second-order digital filters using neural network elements were implemented and analyzed. A research environment based on a jupyter notebook was also created to train and test the developed filter models.

# Зміст

**Перелік умовних позначень, символів, скорочень і термінів ..... 4**

**Вступ ..... 5**

**Розділ 1. Стан проблемної області ..... 7**

**1.1 Дослідження у сфері обробки сигналів та нейронних мереж** ..... 7

**1.2 Цифрові фільтри** ..... 9

**1.3 Нерекурсивні цифрові фільтри** ..... 10

**1.4 Рекурсивні цифрові фільтри** ..... 11

**1.5 Рекурсивні цифрові фільтри першого та другого порядку** ..... 12

**1.6 Фільтр Калмана** ..... 13

**1.7 Нейронні мережі** ..... 15

**Розділ 2. Теоретичні основи досліджень ..... 20**

**2.1 Рекурсивні цифрові фільтри** ..... 20

**2.2 Рекурсивні цифрові фільтри першого та другого порядків** ..... 21

**2.3 Тренувальні та тестувальні дані** ..... 25

**Розділ 3. Аналіз результатів роботи нейронних цифрових фільтрів ..... 27**

**3.1 Порівняння тренування фільтрів** ..... 27

**3.2 Порівняння роботи фільтрів** ..... 32

**3.3 Порівняння імпульсних характеристик фільтрів** ..... 36

**Висновки ..... 39**

**Список використаних джерел ..... 40**

**Додатки ..... 42**

## Перелік умовних позначень, символів, скорочень і термінів

ЦФ – цифровий фільтр – засіб, що обробляє цифровий сигнал з метою відокремлення та/або придушення певних частотних складових цього сигналу.

НЦФ – нерекурсивний цифровий фільтр

РЦФ – рекурсивний цифровий фільтр

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика

Вхідний сигнал – зашумлений сигнал, що необхідно відфільтрувати.

Вихідний сигнал – сигнал, який є результатом обробки вхідного сигналу цифровим фільтром

Бажаний (цільовий) сигнал – сигнал, що є математичною моделлю процесу або теоретично очікуваний сигнал без шумів.

$errorNy$ – середньоарифметичне значення похибки.

$sigmaNy$ – значення середньоквадратичного відхилення.

DTW – алгоритм динамічного викривлення часу (Dynamic time wrapping).

SNR – коефіцієнт співвідношення сигнал/шум (Signal-to-noise ratio).

# Вступ

Актуальність роботи зумовлена швидким розвитком сфери технологій, що потребують якомога точніших фільтрацій цифрових сигналів для подальшої роботи з ними. Передумовами збільшення релевантності досліджень у цьому напрямку є швидкий розвиток платформ інтернету речей та розширення сфери застосувань цифрової фільтрації.

Метою теоретичного дослідження є вивчення особливостей будови та принципів роботи цифрових фільтрів першого та другого порядку і оцінка можливості застосування нейронних цифрових фільтрів для їх заміни. Метою роботи є побудова повноцінних робочих цифрових фільтрів із використанням елементів нейронних мереж, АЧХ яких відповідає АЧХ цифрових фільтрів першого та другого порядку.

Об’єктом дослідження у цій роботі є процес фільтрування цифрових сигналів із використанням різних видів цифрових фільтрів та пов’язані з таким процесом проблеми. Також об’єкт дослідження включає в себе питання взаємодії структурних елементів не пов’язаних між собою інструментів обробки даних, проблему оцінки ефективності роботи цифрових фільтрів та якості фільтрації цифрових сигналів.

Предметом дослідження було визначено процес рекурсивної цифрової фільтрації, принципи побудови адаптивних цифрових фільтрів, що відтворюють рекурентні цифрові фільтри першого та другого порядків, а також реалізація таких адаптивних цифрових фільтрів за допомогою рекурентних нейронних мереж.

У дослідженні використовувались рекурсивні цифрові фільтри в ролі бази для адаптивного цифрового фільтра та методи корекції ваг нейрона для налаштування коефіцієнтів рекурсивного цифрового фільтра. Для програмної реалізації моделей адаптивних цифрових фільтрів було використано мову програмування python у середовищах розробки Google Colab та VSCode. Для реалізації алгоритмів навчання, обчислень та візуалізації було використано такі бібліотеки як numpy, random та matplotlib.

Новизна дослідження полягає у використанні методів корекції ваг нейрона для адаптивної зміни коефіцієнтів цифрового фільтра. Таким чином, цифровий фільтр здатний самостійно змінювати свої налаштування та, відповідно, АЧХ, що дозволяє йому постійно покращувати результати фільтрування цифрових сигналів в умовах, коли частота й характер цільового сигналу можуть змінюватись.

Застосування адаптивних цифрових фільтрів є багатогранним та включає в себе ті сфери, де неможливо точно передбачити, яким чином змінюватиметься сигнал. Прикладами галузей застосування можуть стати проекти у сфері інтернету речей, аналіз часових рядів, обробка експериментальних даних та будь-яка задача, де необхідна очистка сигналу від складових шуму.

Розроблені моделі передбачають широкі можливості модифікації з метою пристосування їх до вирішення конкретних завдань фільтрації. Подальший розвиток розробленого адаптивного цифрового фільтра може вестись у напрямку використання складніших рекурентних цифрових фільтрів та використання складніших нейронних структур, що можуть дозволити більш гнучко налаштовувати фільтр та виділяти неочевидні ознаки та складові сигналу.

# Розділ 1. Стан проблемної області

## 1.1 Дослідження у сфері обробки сигналів та нейронних мереж

Обґрунтування актуальності роботи вимагає огляду тенденцій наукових досліджень та розробок у дотичних сферах. Для огляду було обрано такі галузі як обробка сигналів, комп'ютерні науки та штучний інтелект. Відповідно було обрано ключові слова і проведено пошук статей у пошуковій системі SJR (Scimago Journal & Country Rank). На основі отриманих даних для кожної з галузей та для всіх разом було сформовано графіки кількості нових статей починаючи з 1999 року, а також графіки кількості статей за рік.

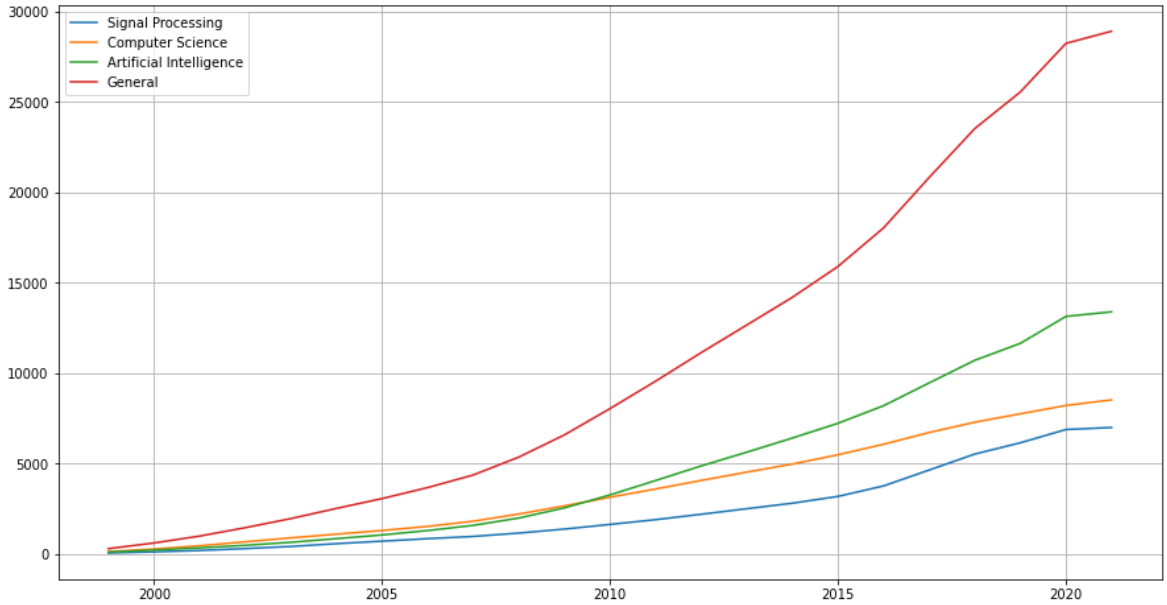



Рис.1. Графіки кількості нових статей

На наведеному вище графіку показана кількість статей на певний момент часу (синім – галузь обробки сигналу, оранжевим – галузь комп'ютерних наук, зеленим – галузь штучного інтелекту, червоним – загальна кількість). Для більш наочного аналізу тенденцій слід розглядати зміну приросту кількості статей у різні періоди часу.

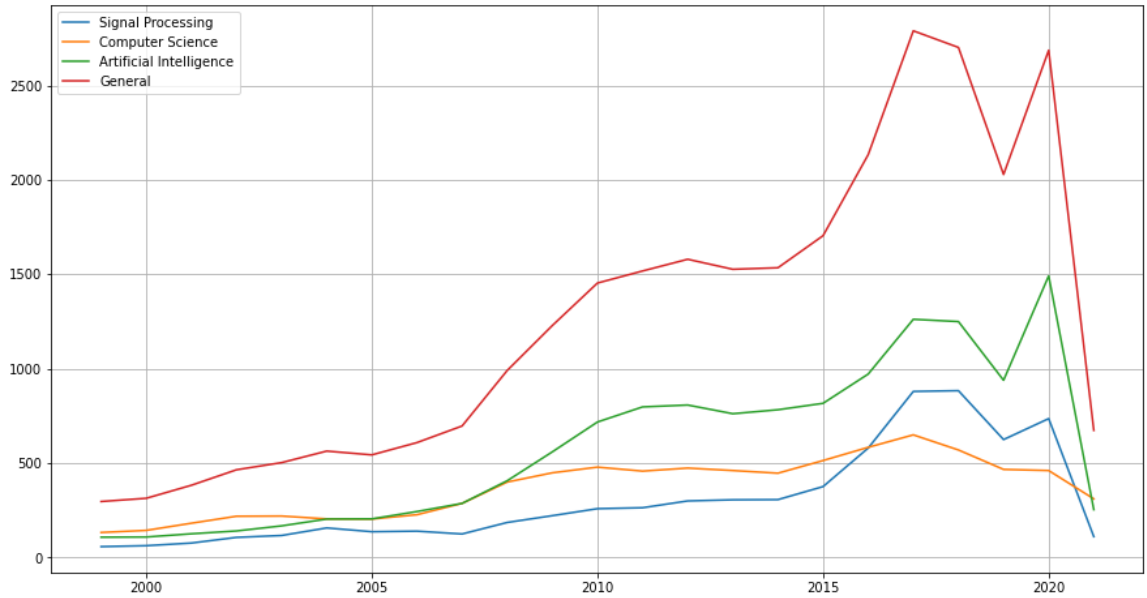



Рис.2. Графік приросту кількості статей.

Одразу слід зауважити, що спад наприкінці графіків пов'язаний із тривалою систематизацією даних і певною часовою затримкою набуття ними актуальності, тому розглядатимемо дані до 2020 року.

Розглянемо проміжки часу, коли значення приросту статей зростало.

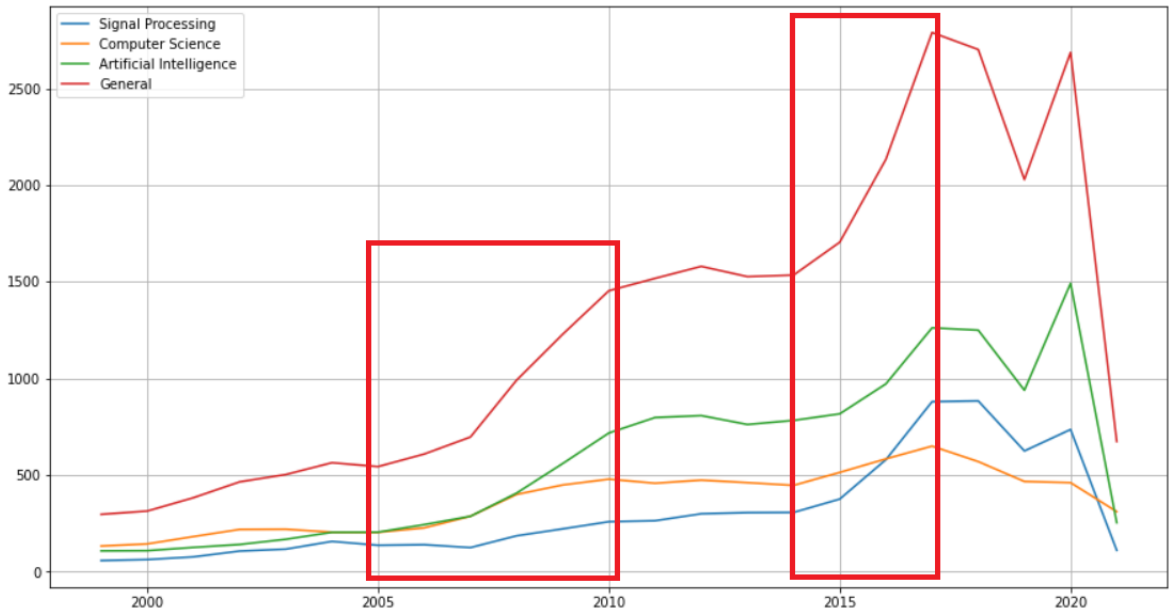



Рис.3. Проміжки збільшення приросту.

Наведені ділянки приросту пов'язані із бурхливим розвитком обчислювальних пристроїв, особливо відеокарт, а також зі стрімким розвитком інструментів розробки та керування для нейронних мереж. Збільшення приросту, зафіксоване

станом на 2020 рік скоріш за все спричинений розвитком хмаркових інструментів роботи з даними та нейронними мережами, внаслідок чого полегшилась розробка та реалізація нових методів обробки сигналів та роботи з нейронними мережами. Один з таких інструментів – Google Colab – був використаний при виконанні цієї роботи.

## 1.2 Цифрові фільтри

Цифровий фільтр — апаратний або програмний засіб, що обробляє цифровий сигнал з метою відокремлення та/або придушення певних частотних складових цього сигналу.

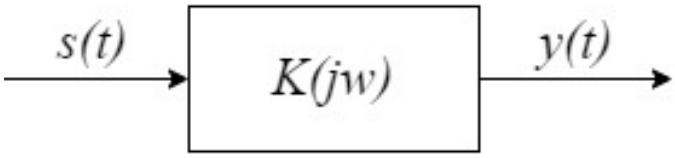



Рис. 4. Структурна схема цифрового фільтра.

На цьому рисунку $K(jw)$ – частотна характеристика цифрового фільтра, що перетворює вхідний сигнал $s(t)$ на вихідний сигнал $y(t)$.

Для того, щоб характеризувати цифрові фільтри використовують імпульсну характеристику. Імпульсна характеристика – це сигнал, що описує реакцію фільтра на одиничний імпульс, поданий на його вхід. Згортка імпульсної характеристики та вхідного сигналу в результаті дає вихідний сигнал:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

На основі імпульсної характеристики цифрові фільтри поділяють на фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою, які також називають нерекурсивними цифровими фільтрами (НЦФ) та фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою, які також називають рекурсивними цифровими фільтрами (РЦФ).

Основним завданням при використанні цифрових фільтрів для зменшення тих чи інших складових сигналу є підбір коефіцієнтів фільтра. Наразі найбільш

застосовувані методи базуються на алгебраїчних перетвореннях та не завжди забезпечують швидку оптимізацію коефіцієнтів фільтра.

Основними перевагами цифрових фільтрів над аналоговими є:

– висока точність, в аналогових фільтрах точність обмежена допусками на елементи;

– стабільність, так як відсутній дрейф параметрів в залежності від умов зовнішнього середовища;

– гнучкість в налаштуванні та легкість зміни параметрів фільтрів.

Недоліки цифрових фільтрів у порівнянні з аналоговими:

– обмеження робочого діапазону частот частотою Найквіста;

– проблеми з роботою в режимі реального часу, так як всі обрахунки повинні закінчитися за період дискретизації;

– для високої точності фільтру потрібні АЦП та ЦАП високої розрядності.

## 1.3 Нерекурсивні цифрові фільтри

Як уже було згадано вище, нерекурсивні цифрові фільтри – це вид цифрових фільтрів, що має скінченну імпульсну характеристику.

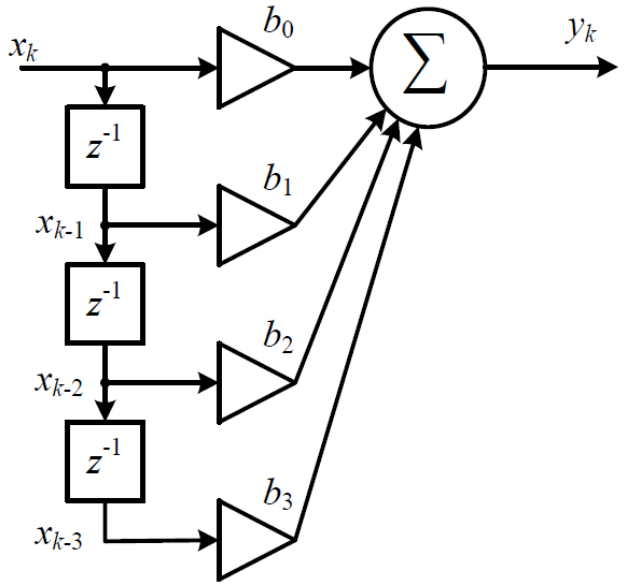



Рис. 5. Структурна схема нерекурсивного цифрового фільтра.

На рисунку 2 зображене схематичне представлення математичної моделі нерекурсивного цифрового фільтра, де $x$ – значення вхідного сигналу, а індекс вказує на його затримку, $z^{-1}$ – елемент фільтра, що виконує затримку (буферизацію) значень вхідного сигналу, $b$ – коефіцієнт НЦФ, із відповідними індексами, $\Sigma$ – суматор, в якому додаються добутки значень сигналів та відповідних коефіцієнтів, а $y_k$ – значення вихідного сигналу.

Нерекурсивними такі фільтри називають через те, що вони використовують лише значення сигналу, що подаються на вхід фільтру. Таким чином, нерекурсивні цифрові фільтри забезпечують собі більшу стійкість у роботі та можливість лінійної реалізації.

## 1.4 Рекурсивні цифрові фільтри

Рекурсивні цифрові фільтри – це вид цифрових фільтрів, що має нескінченну імпульсну характеристику. Рекурсивними їх називають через те, що вони використовують не лише значення сигналу, що подаються на вхід фільтру, а й значення вихідного сигналу:

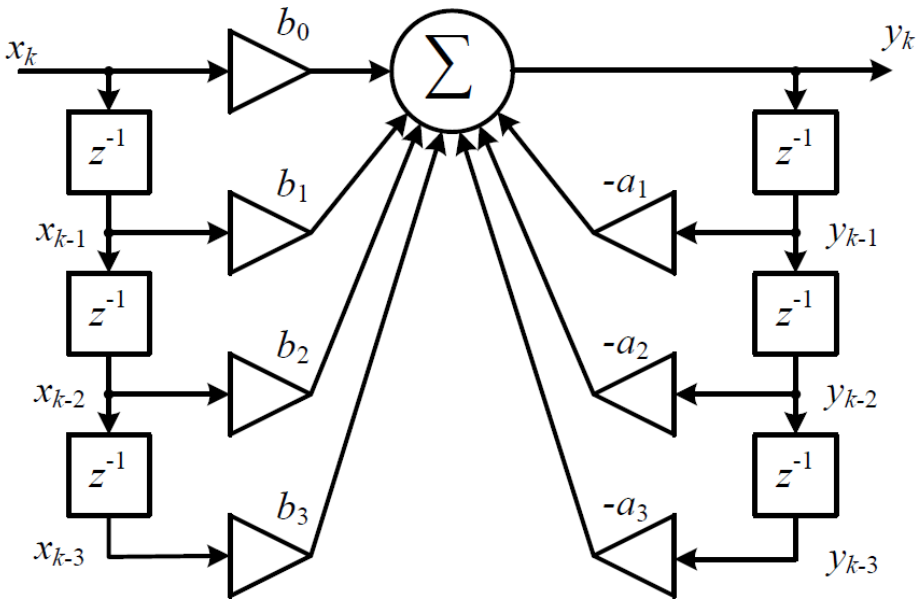



Рис. 6. Структурна схема рекурсивного цифрового фільтра.

На приведеному вище рисунку зображене схематичне представлення математичної моделі нерекурсивного цифрового фільтра, де $x$ – значення вхідного сигналу, а індекс вказує на його затримку, $z^{-1}$ – елемент фільтра, що виконує затримку (буферизацію) значень вхідного сигналу, $b$ – коефіцієнт РЦФ, при значеннях вхідного сигналу, із відповідними індексами, $a$ – коефіцієнт РЦФ, при значеннях вихідного сигналу, із відповідними індексами, $\Sigma$ – суматор, в якому додаються добутки значень сигналів та відповідних коефіцієнтів, а $y_k$ – значення вихідного сигналу, індекс якого вказує на його затримку.

Варто зазначити кілька особливостей рекурсивних цифрових фільтрів, а саме те, що вони використовують значення і вхідного і вихідного сигналу, дозволяє їм плавніше реагувати на викиди у вхідному сигналі, а також забезпечує нескінченну імпульсну характеристику завдяки своїй рекурсивності.

Найпростішими та першими розробленими рішеннями цифрової фільтрації були розглянуті вище цифрові фільтри, параметри яких задаються заздалегідь. В цьому і полягає їхній основний недолік, оскільки реальному житті та середовищах використання майже неможливо передбачити усі ситуації роботи фільтра і, відповідно, у певних випадках фільтрація може містити більшу похибку або навіть показувати непередбачувані результати.

## 1.5 Рекурсивні цифрові фільтри першого та другого порядку

При виконанні цієї роботи, звертаємо особливу увагу на рекурсивні цифрові фільтри першого та другого порядку. Порядок рекурсивного фільтра визначається порядком диференційного рівняння системи, яку він представляє, а у випадку цифрового фільтра, порядок дорівнює кількості вихідних значень фільтра, що подаються на його вхід із затримкою. Таким чином, схеми таких цифрових фільтрів матимуть наступний вигляд:

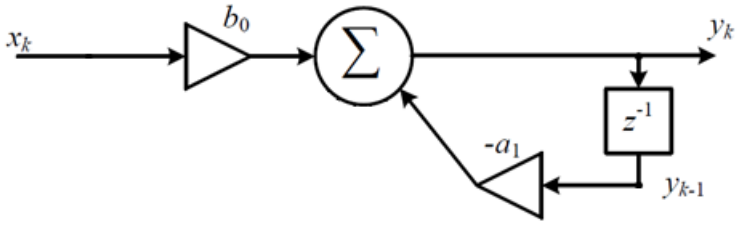



Рис. 7. Структурна схема рекурсивного цифрового фільтра першого порядку.

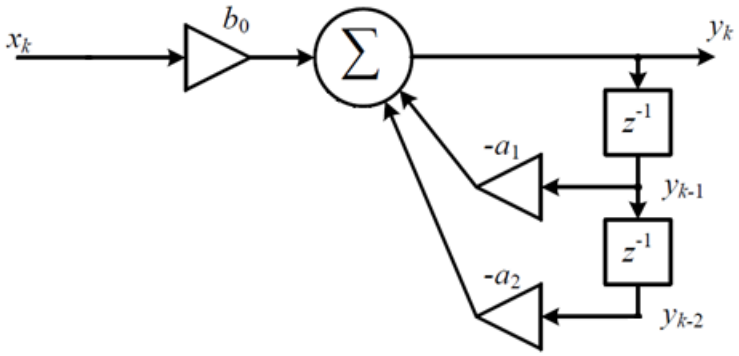



Рис. 8. Структурна схема рекурсивного цифрового фільтра другого порядку.

Наведені схеми рекурсивних цифрових фільтрів реалізують дискретизацію RC та RLC ланок відповідно. Саме такі ланки найчастіше використовують при синтезі аналогових фільтрів, оскільки їхні АЧХ доволі близькі до ідеальних і вони доволі прості в реалізації. З цієї причини, було вирішено підготувати адаптивні цифрові фільтри на їх основі та порівняти їх застосовність та ефективність для різних типів сигналів.

## 1.6 Фільтр Калмана

Більш досконалим рішенням, що покриває набагато більшу частину ситуацій застосування цифрового фільтра, є цифрові фільтри, які мають рекурсивні алгоритми адаптації. Іншими словами, вони здатні змінювати свої налаштування відповідно до умов середовища, таким чином збільшуючи ефективність своєї роботи. Прикладом такої адаптивної системи є широко відомий фільтр Калмана, який використовує фізичну модель сигналу та значення

сигналу на попередньому кроці, що дозволяє йому робити вельми точну оцінку реального значення сигналу.

Фільтр Калмана – це вид цифрових фільтрів, що базується на формулюванні простору станів лінійних динамічних систем і забезпечує рекурсивне рішення лінійної проблеми оптимальної фільтрації. Він може бути застосованим стосується як у стаціонарних, так і нестаціонарних середовищах, тобто володіє адаптивністю. Цей фільтр є рекурсивним, оскільки кожна оновлена оцінка стану обчислюється на основі попередньої оцінки та нових вхідних даних, тому лише попередня оцінка потребує зберігання. Окрім усунення необхідність зберігання всіх спостережуваних минулих даних, фільтр Калмана є більш ефективним, з точки зору обчислень, ніж вирахування оцінки безпосередньо з даних минулого спостереження на кожному етапі процесу фільтрації.

Рис. 9. Схема роботи цифрового фільтра Калмана.

Головною особливістю фільтру Калмана є виведення оцінки стану на основі вимірювання та передбачення, що дає змогу зменшити загальну похибку та зробити точнішу фільтрацію.

Найсучасніші варіанти побудови фільтрів Калмана передбачають використання елементів нейронних мереж для обробки вхідних даних фільтра і, як результат, покращення якості оцінки реального значення сигналу.

## 1.7 Нейронні мережі

Нейронні мережі – це метод машинного навчання, основна ідея якого полягає в імітації роботи біологічних нейронних мереж. Нейронні мережі зазвичай застосовують для вирішення тих задач, які складно розв’язати методами лінійного програмування.

Структурною одиницею нейронної мережі є нейрон, схему якого наведено нижче:

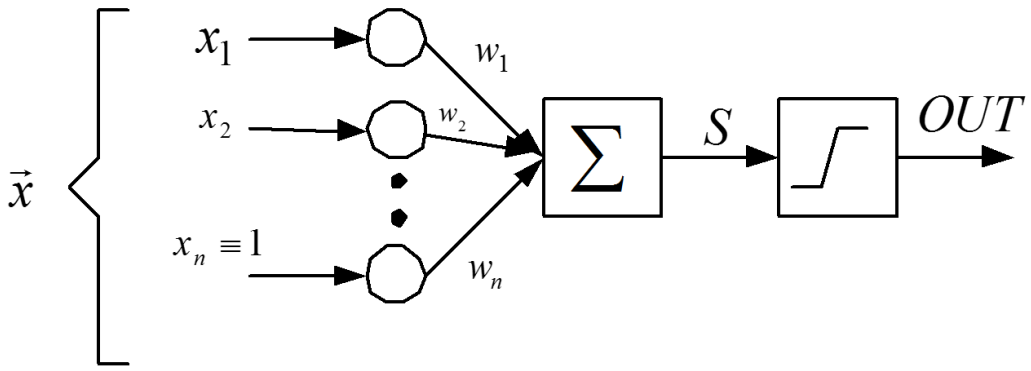



Рис. 10. Структурна схема математичної моделі нейрона.

$\vec{x}$ – вектор вхідних значень;

$w_i$ – ваги нейрона;

$S$ – сума добутку значень ваг та значень поданих на відповідні входи

$$S = \sum_{i=0}^{n} x_i w_i \quad ;$$

$f$ – функція активації;

$OUT$ – вихід нейрона, що є значенням функції активації від суми:

$$OUT = f(S).$$

Характерною рисою нейромереж є глобальність зв’язків. Базові елементи штучних нейромереж – формальні нейрони, націлені на роботу з

широкосмуговою інформацією. Кожний нейрон мережі, як правило, зв'язаний з усіма нейронами попереднього шару ( або взагалі з усіма нейронами) як показано на рисунку 6 (даний рисунок ілюструє найбільш поширену у сучасних прикладних нейромережах архітектуру багатошарового персептрона). В цьому принципова відмінність формальних нейронів від базових елементів ЕОМ – логічних вентилів, котрі мають лише два входи і один вихід.

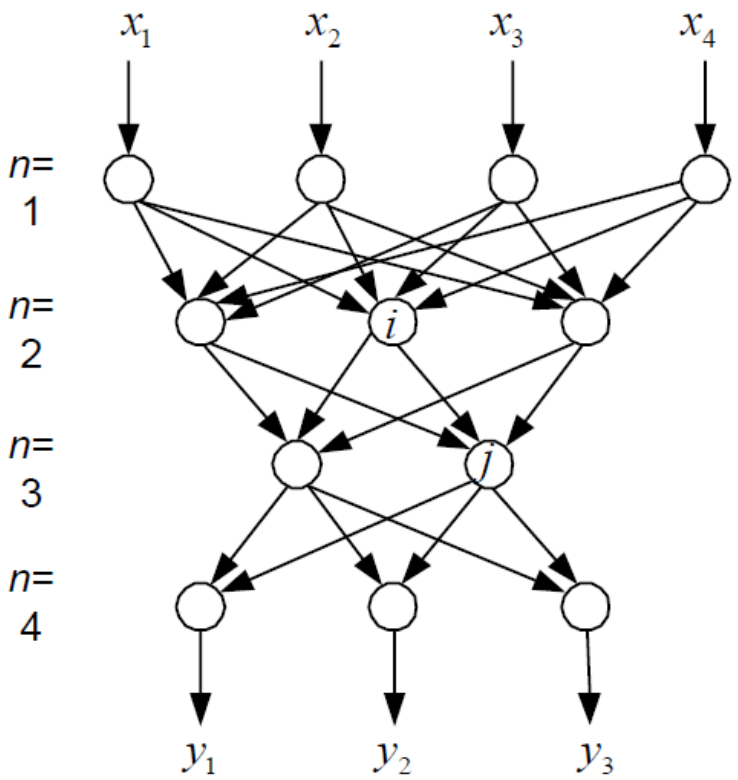



Рис. 11. Структура чотиришарової нейромережі.

Нейронні мережі є нелінійними саме завдяки використанню багатошарової структури та нелінійних функцій активації. Це дозволяє використовувати їх для розв'язку задач, які є складними для лінійних алгоритмів. Можна привести список типових задач для нейронних мереж:

- Апроксимація функцій за набором точок (регресія).
- Класифікація даних за заданим наборм класів.
- Кластеризація даних з виявленням наперед невідомих класів-прототипів.
- Стиснення інформації.

- Відновлення (відтворення) втрачених даних.
- Асоціативна пам’ять.
- Оптимізація, оптимальне управління (керування).

Найважливішою характеристикою нейронної мережі є її похибка, яка є різницею отриманого результату і очікуваного. Похибка мережі залежить від її конфігурації – сукупності всіх її синаптичних зв’язків. Але цей зв’язок не прямий а опосередкований, бо конкретні значення ваг приховані від зовнішнього спостерігача. Для нього мережа - свого роду чорний ящик, а оцінювати її роботу він може лише на основі її поведінки – реакції на задані вхідні сигнали.

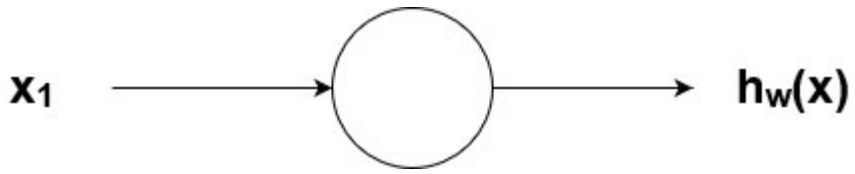
Функція похибки має вигляд $E(w) = E\{x^{\alpha}, y^{\alpha}, y(x^{\alpha}, w)\}$, де $\{x^{\alpha}, y^{\alpha}\}$ - набір прикладів (пар вхід-вихід) на яких навчається нейромережа, а $y(x^{\alpha}, w)$ - реальні значення виходів нейромережі, котрі залежать від конкретних значень синаптичних ваг. Такий спосіб (тип) навчання, коли реальний вихід нейромережі порівнюється з еталонним називають навчання з вчителем.

Деколи вихідна інформація відома не повністю. Наприклад, замість еталонних відгуків відомо лише краще чи гірше дана конфігурація мережі справляється з поставленою задачею (так як в дитячій грі “тепліше- холодніше”). Цей тип навчання називають навчання з підкріпленням (*reinforcement learning*).

Взагалі можливий такий режим навчання, коли бажані значення виходів взагалі невідомі і мережа навчається лише на наборі вхідних даних $\{x^{\alpha}\}$: $E(w) = E\{x^{\alpha}, y(x^{\alpha}, w)\}$. Такий режим навчання називають навчання без вчителя. У цьому випадку мережі самій пропонується знайти скриті закономірності в масиві даних.

Ще один інструмент побудови нейронних мереж, який часто використовується у розробці – це постійне зміщення. Постійне зміщення дозволяє зміщувати функцію активації по осі x, що може бути корисним для прискорення оптимізації ваг нейрона.

Для кращого пояснення ролі постійного зміщення розглянемо простий нейрон, у якому є один вхід та один вихід:




Аргументом активаційної функції у такому випадку є просто $x_1 w_1$. Покажемо, як саме впливає зміна в $w_1$ у цій простій мережі.

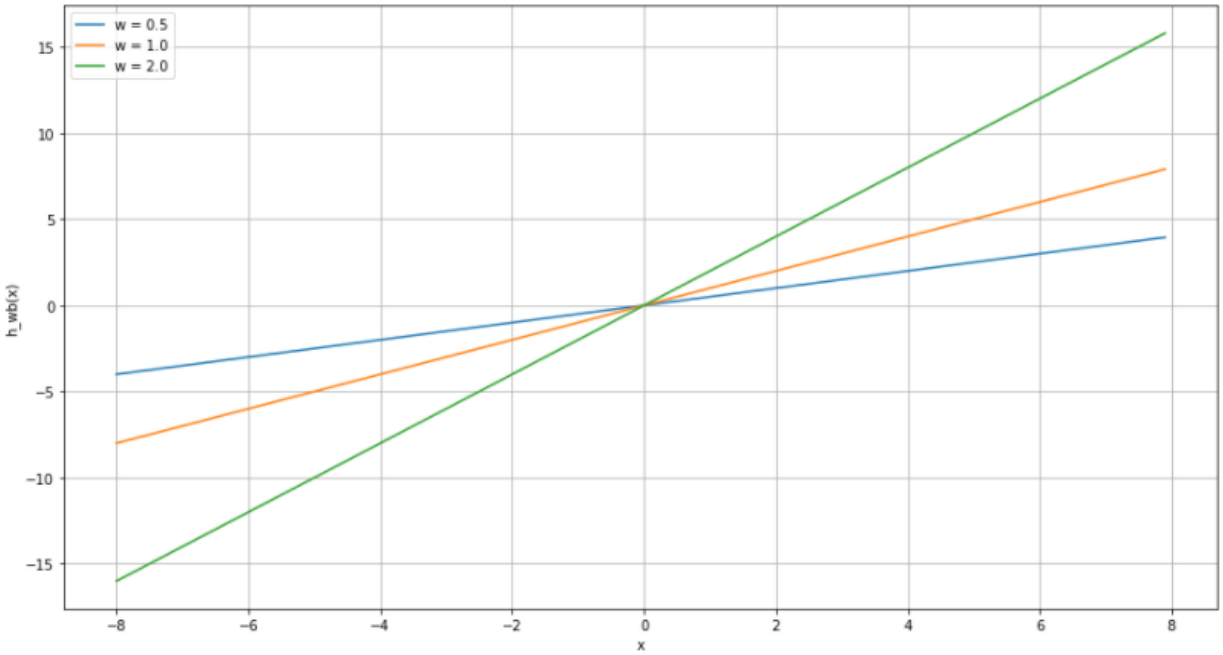



Рис. 12. Графіки функцій активації нейрона для різних значень ваги.

Тут ми можемо бачити, що при зміні ваги змінюється також рівень нахилу графіка активаційної функції. Це корисно, якщо ми моделюємо різні щільності взаємозв'язків між входами та виходами. Проте залишається питання, яким чином можна регулювати значення вільного члена цієї лінійної функції. Для цього і використовують зміщення. Розглянемо таку мережу із зміщенням на вході:

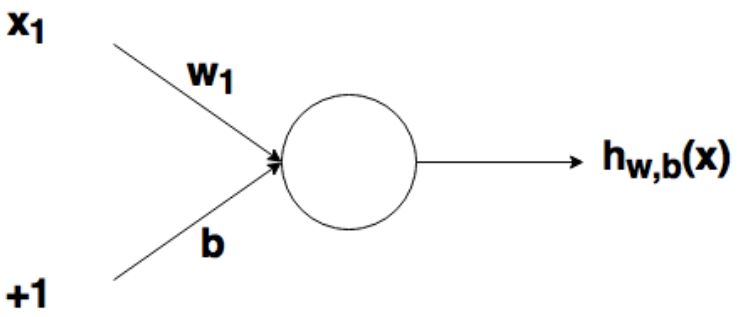



Рис. 13. Схема нейронної мережі, що використовує постійне зміщення.

Візуалізувавши графік функції активації можна побачити, що змінюючи вагу зміщення b, можна регулювати вільний член лінійної функції активації.

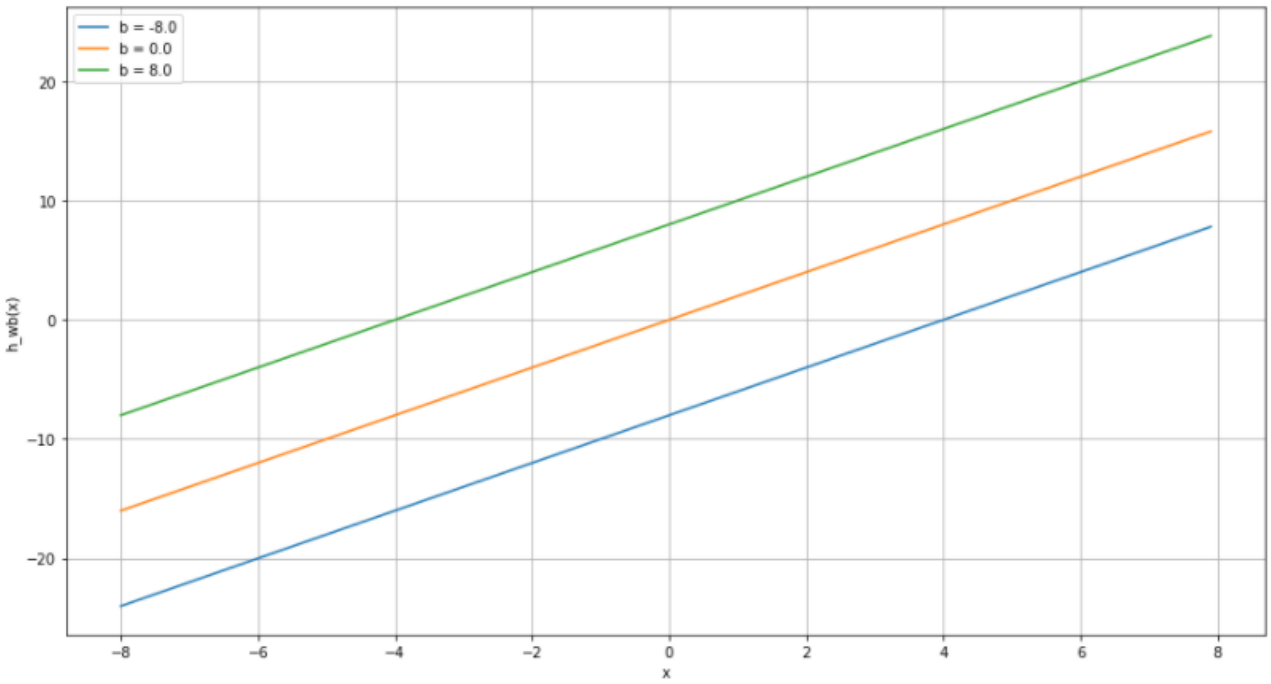



Рис. 14. Графіки функцій активації нейрона для різних значень ваги зміщення.

# Розділ 2. Теоретичні основи досліджень

## 2.1 Рекурсивні цифрові фільтри

Адаптивний цифровий фільтр, що розробляється, базуватиметься на принципах створення рекурсивних цифрових фільтрів. У дослідженні нас цікавить їхня характерна особливість, а саме те, що вони використовують не лише значення сигналу, що подаються на вхід фільтру, а й значення вихідного сигналу, а тому мають нескінченну імпульсну характеристику

Говорячи про властивості РЦФ, для зручності, значення вихідного сигналу можна записати також у вигляді наступної формули:

$$y(k) = b_1 x(k) + b_2 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m) -$$

$$-a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n).$$

Будь-який РЦФ також можна характеризувати імпульсною характеристикою. Імпульсну характеристику РЦФ можна знайти здійснивши наступні перетворення:

- Записавши рівняння РЦФ у компактнішому вигляді отримаємо:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, x(k-i) + \sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k-i).$$

- Для отримання імпульсної характеристики треба на фільтр подати сигнал у вигляді дельта-функції:

$$x(k) = \delta(k).$$

- Змінимо імпульсну характеристику для РЦФ, підставивши у рівняння дельта-функцію:

$$h(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, \delta(k-i) + \sum_{i=0}^{n} a_i\, h(k-i).$$

Можна помітити, що формула імпульсної характеристики для РЦФ містить своє попереднє значення, тому вона також є рекурсивною, що і забезпечує її нескінченність. Таким чином, виконавши операцію згортки вхідного сигналу і приведеної вище імпульсної характеристики, зможемо обчислити вихідний сигнал даного РЦФ.

Розрахунок коефіцієнтів СІХ фільтрів найчастіше виконується за допомогою таких методів:

- метод зважування( вирізування);
- оптимізовані методи;
- метод частотної вибірки і т.д.

Наведені вище методи використовують аналітичні підходи та алгебраїчні перетворення, що зумовлює велику складність їхньої побудови та реалізації. Також найчастіше, вже налаштовані РЦФ не здатні змінювати свої характеристики, якщо змінюється характер вхідного сигналу, що вимагає додаткового втручання та зміни налаштувань.

Однак, саме РЦФ, завдяки особливостям їхньої побудови, мають більше коефіцієнтів, що будуть корисними при побудові моделі адаптивного цифрового фільтра і забезпечать більшу гнучкість налаштування та пристосування фільтра до бажаного сигналу.

## 2.2 Рекурсивні цифрові фільтри першого та другого порядків

Модель рекурсивного фільтру низьких частот можна відтворити програмним чином, якщо проаналізувати поведінку RC фільтру в часовій області і після того дискретизувати його модель. Розглянемо схему RC фільтра:

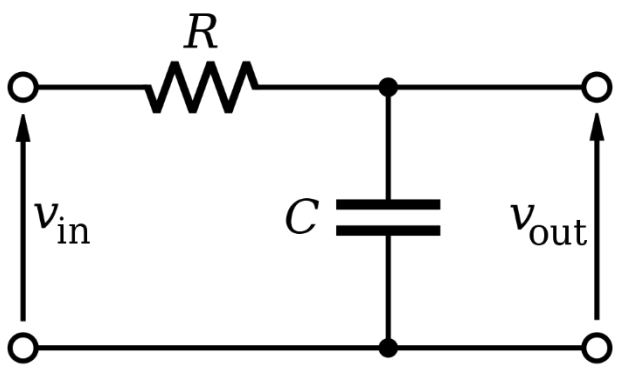



Рис. 15. Структурна схема RC фільтра.

Простий RC-фільтр низьких частот можна описати наступними рівняннями:

$$v_{in}(t) - v_{out}(t) = R\ i(t)$$

$$Q_c(t) = C\ v_{out}(t)$$

$$i(t) = \frac{dQ_c}{dt}$$

Таким чином:

$$v_{in}(t) - v_{out}(t) = R\mathrm{C}\ \frac{dv_{out}}{dt}$$

Це рівняння можна дискретизувати. Для простоти, припустимо що інтервали часу входу і виходу розподілені рівномірно в часі і мають довжину $\Delta T$. Нехай інтервали для $v_{in}$ задаються послідовністю, а інтервали $v_{out}$ задаються послідовністю, що відповідають однаковим точкам у часі. Виконавши ці підстановки, отримаємо:

$$x_i - y_i = R\mathrm{C}\ \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta T}$$

Переписавши це рівняння отримаємо:

$$y_i = x_i \left( \frac{\Delta T}{R\mathrm{C} + \Delta T} \right) + y_{i-1} \left( \frac{R\mathrm{C}}{R\mathrm{C} + \Delta T} \right)$$

Таким чином було отримано рекурентне рівняння, яке є дискретизованим представленням RC фільтра. У цьому рівнянні можемо провести заміну змінних:

$$y_i = \alpha x_i + (1 - \alpha) y_{i-1} \qquad (1)$$

І виділити коефіцієнт $\alpha$:

$$\alpha = \frac{\Delta T}{RC + \Delta T}$$

Отримане рівняння можна доволі просто реалізувати у вигляді перцептрона, коефіцієнт $\alpha$ якого оновлюється методом градієнтного спуску. Варто зазначити, що у нейронній мережі будуть використовуватись два незалежні коефіцієнти $\alpha$ та $\beta$, тому рівність $\beta = 1 - \alpha$ можна використовувати для оцінки натренованої нейронної мережі.

Такі ж перетворення можна провести і для коливальної системи, що описується диференційним рівнянням другого порядку. Розглянемо схему RLC фільтру та його рівняння.

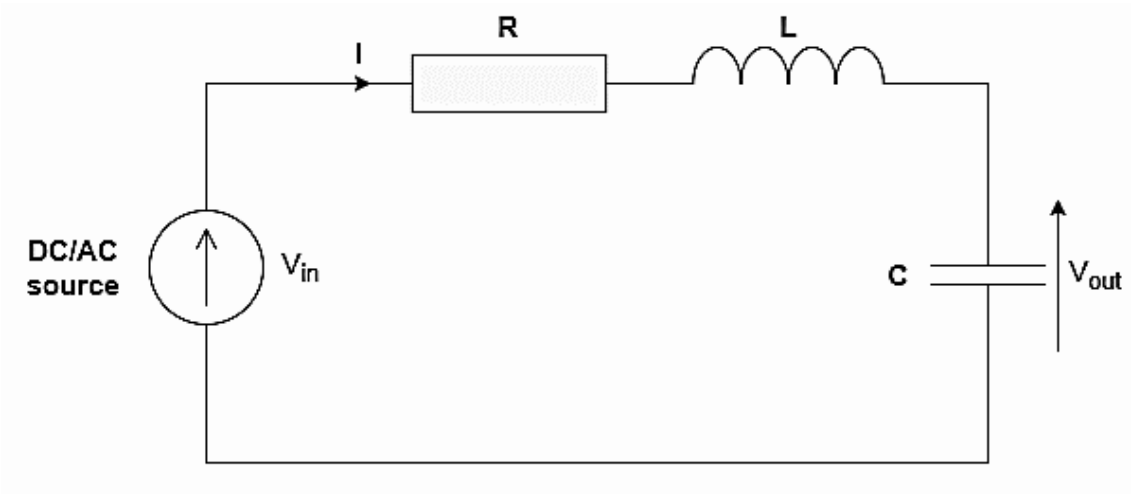



Рис. 16. Структурна схема RLC фільтра.

Простий RLC-фільтр можна описати наступним диференційним рівнянням:

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{LC} y = x(t)$$

Дискретизувавши його і провівши заміну змінних, отримаємо наступне рівняння:

$$\alpha = \frac{R}{2L};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta t^2} + 2\alpha \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} + \omega_0^2 y_n = x_n$$

З цього рівняння можемо отримати рекурентну формулу знаходження наступного значення сигналу на виході фільтра:

$$y_n = \frac{\Delta t^2 x_n + 2(1+\alpha\Delta t) y_{n-1} - y_{n-2}}{1 - 2\alpha\Delta t + \omega_0^2 \Delta t^2}$$

Зробимо ще одну заміну змінних за допомогою коефіцієнта $\alpha$:

$$a = 1 - 2\alpha\Delta t + \omega_0^2 \Delta t^2$$

І перепишемо рекурентну формулу:

$$y_n = \frac{\Delta t^2}{a} x_n + \frac{2(1+\alpha\Delta t)}{a} y_{n-1} - \frac{1}{a} y_{n-2}$$

Таким чином, ми отримуємо рекурентну формулу, на основі якої можна побудувати нейронний цифровий фільтр, що відтворюватиме роботу RLC фільтра. Ваги перцептрона при побудові нейронної мережі визначатимуться наступним чином:

$$w_0 = \frac{\Delta t^2}{a};$$

$$w_1 = \frac{2(1+\alpha\Delta t)}{a};$$

$$w_2 = -\frac{1}{a}.$$

## 2.3 Тренувальні та тестувальні дані

Для порівняння особливостей тренування та роботи змодельованих нейронних цифрових фільтрів необхідно мати кілька сигналів з різними властивостями. У нашому випадку тренування та тестування фільтру було проведене з використанням періодичних сигналів зі 1000 значень та доданим шум, представленим випадковою величиною математичним сподіванням $M = 0$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 1{,}0$. Додавання такого шуму дозволяє імітувати реальні сигнали, з якими стикаються при розв'язуванні прикладних задач обробки сигналів.

При аналізі було використано наступні сигнали:

- Синусоїдальний

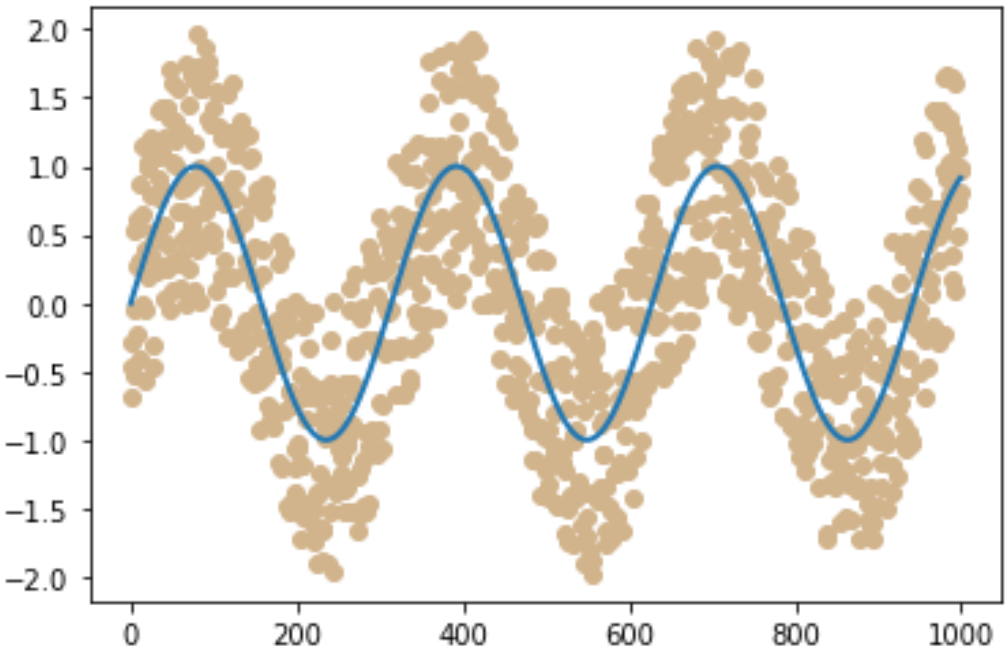



Рис. 17. Чистий синусоїдальний сигнал (синім) та сигнал з шумом (сірим).

- Трикутний

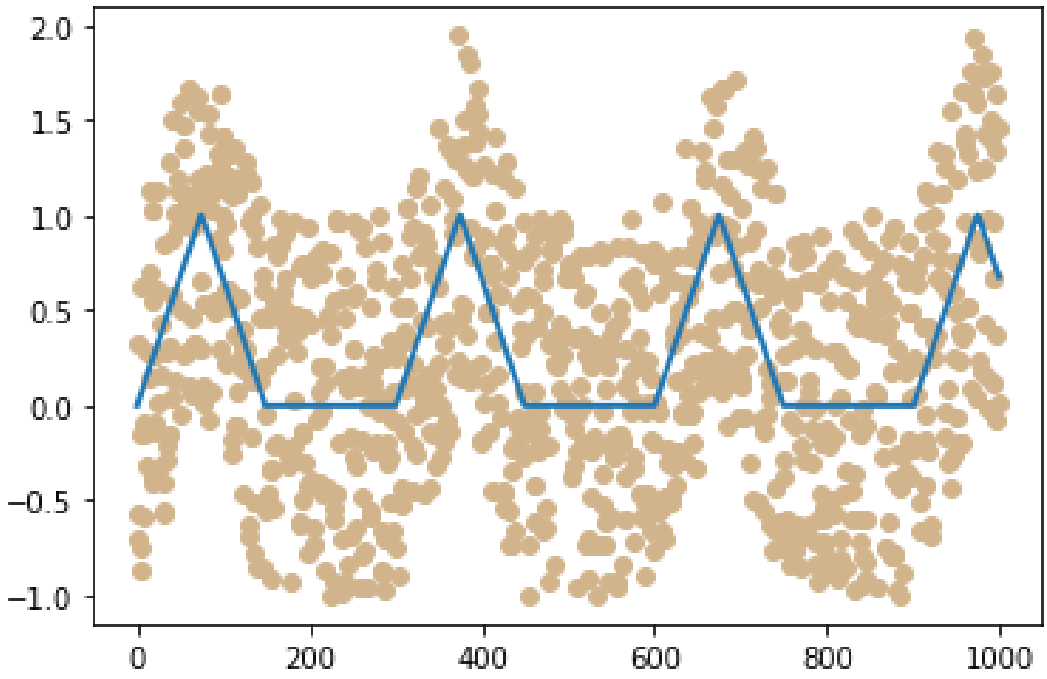



Рис. 18. Чистий трикутний сигнал (синім) та сигнал з шумом (сірим).

- Прямокутний

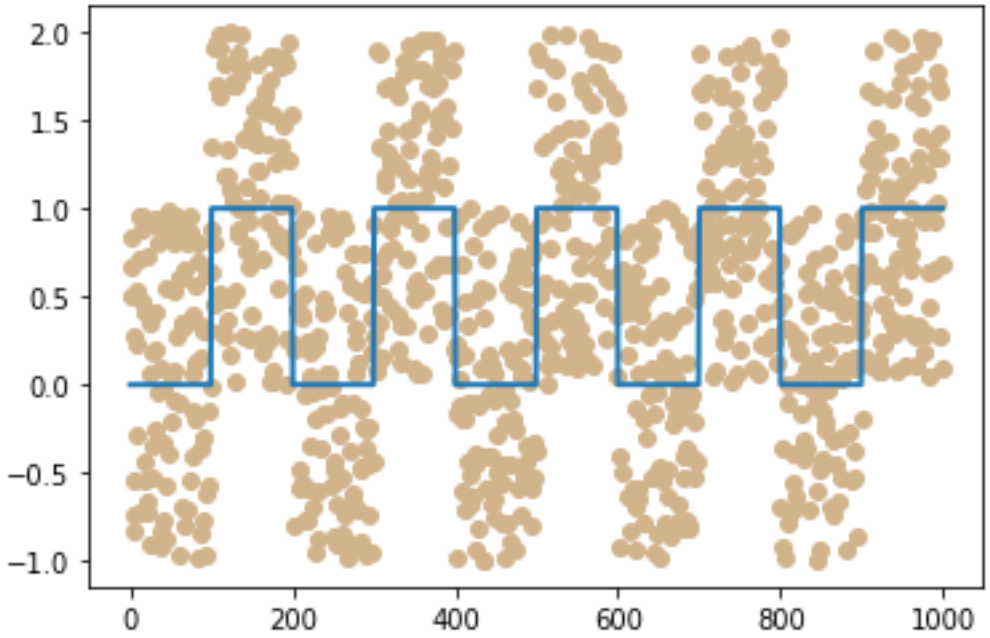



Рис. 19. Чистий прямокутний сигнал (синім) та сигнал з шумом (сірим).

- Сходинковий

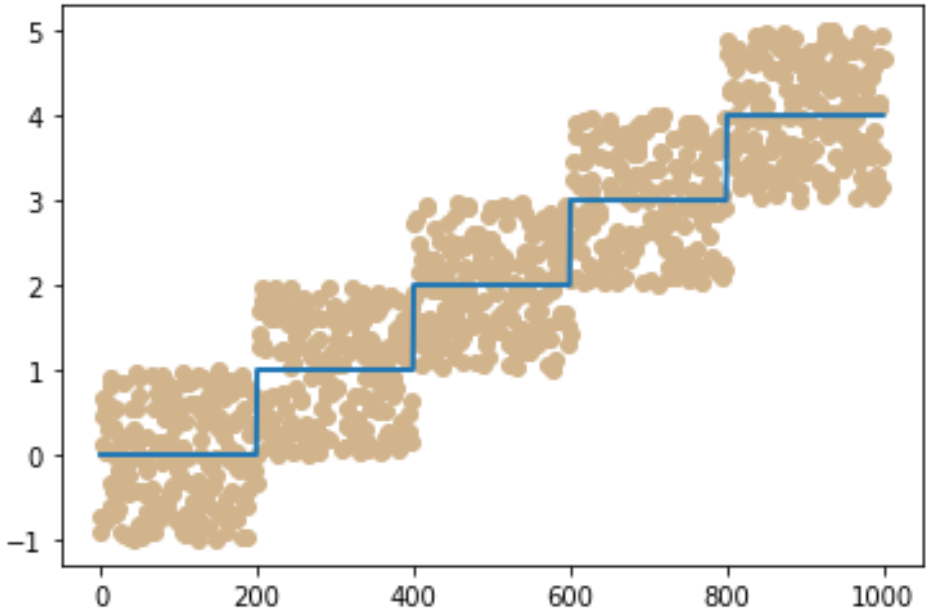



Рис. 20. Чистий сходинковий сигнал (синім) та сигнал з шумом (сірим).

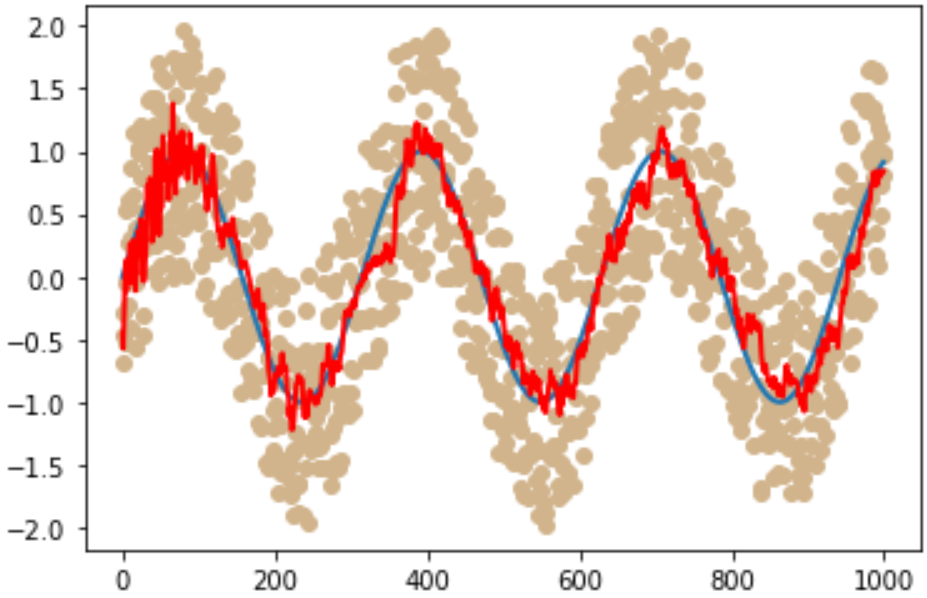
Обрані сигнали є періодичними, що дозволить простежити хід тренування фільтра на кожному з періодів. Відрізок сигналу для тренування та тестування має однакові характеристики, містить кілька періодів та шум, середньоквадратичне відхилення якого досить значне, аби імітувати реальні сигнали. Для аналізу було обрано саме такі сигнали, оскільки вони найбільш схожі на більшість сигналів, що розглядаються при вирішенні реальних завдань. Аналіз таких сигналів є продовженням дослідження, розпочатого у попередній кваліфікаційній роботі.

# Розділ 3. Аналіз результатів роботи нейронних цифрових фільтрів

## 3.1 Порівняння тренування фільтрів

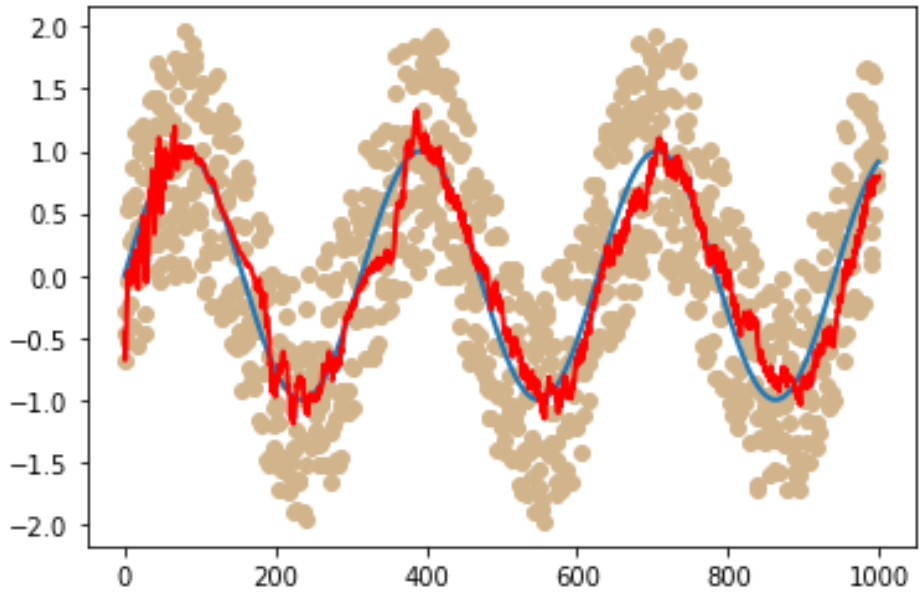
Розглянемо процес навчання адаптивного цифрового фільтра першого та другого порядку на прикладі перетворення вхідного зашумленого сигналу у вихідний відфільтрований сигнал. При цьому коефіцієнти фільтра змінюються відповідно до навчання за алгоритмом градієнтного спуску.

Нижче наведено тренування нейронних цифрових фільтрів першого та другого порядків на синусоїдальному сигналі. Порівнявши їх, можна знайти ледь помітну різницю між вихідними сигналами фільтрів. У фільтра другого порядку збіжність коефіцієнтів тут дещо швидша і його вихідний сигнал стабілізується через меншу кількість часу.




$$SNR_{input} = 1.45$$
$$SNR_{output} = 12.47$$

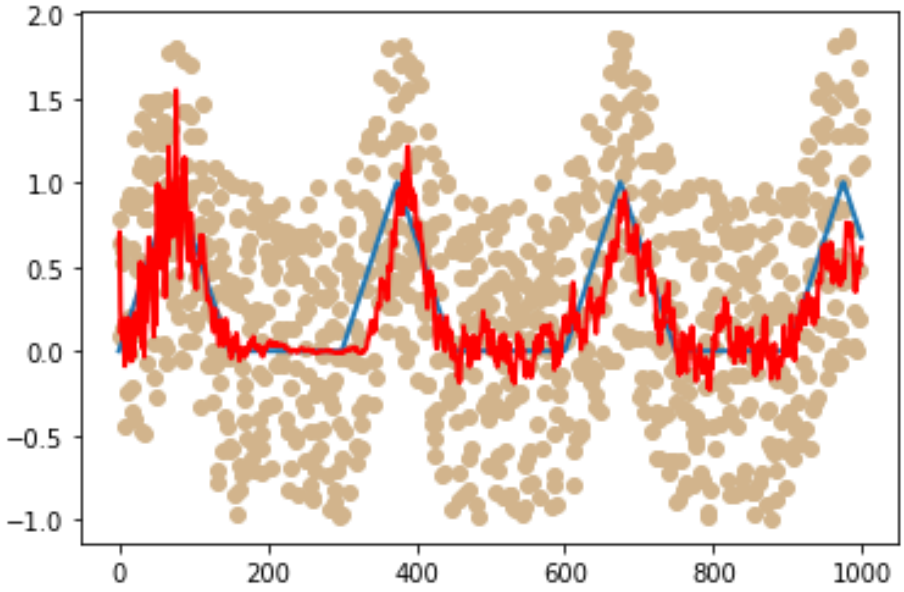
Рис. 21. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.




$$SNR_{input} = 1.45$$
$$SNR_{output} = 12.02$$

Рис. 22. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим) та вихід фільтра(червоним).

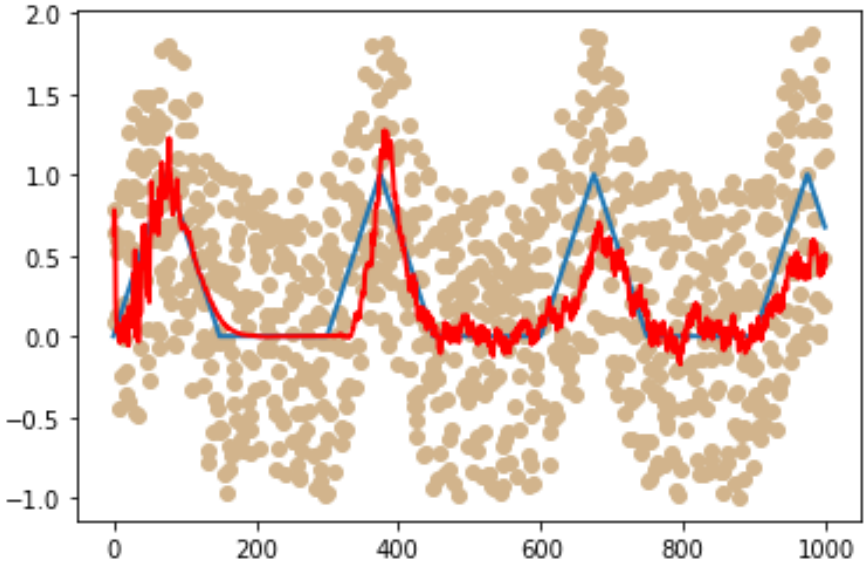
Розглянемо детальніше тренування нейронних цифрових фільтрів першого та другого порядків на трикутному сигналі. Порівнявши їх, можна знову простежити чітку різницю у швидкості збіжності коефіцієнтів. Проте також помітно, що фільтр другого порядку в кінці тренування почав відхилятися від чистого сигналу, що може свідчити про потребу в модифікації схеми фільтра для такого типу сигналів.




$$SNR_{input} = 0.59$$

$$SNR_{output} = 6.43$$

Рис. 23. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

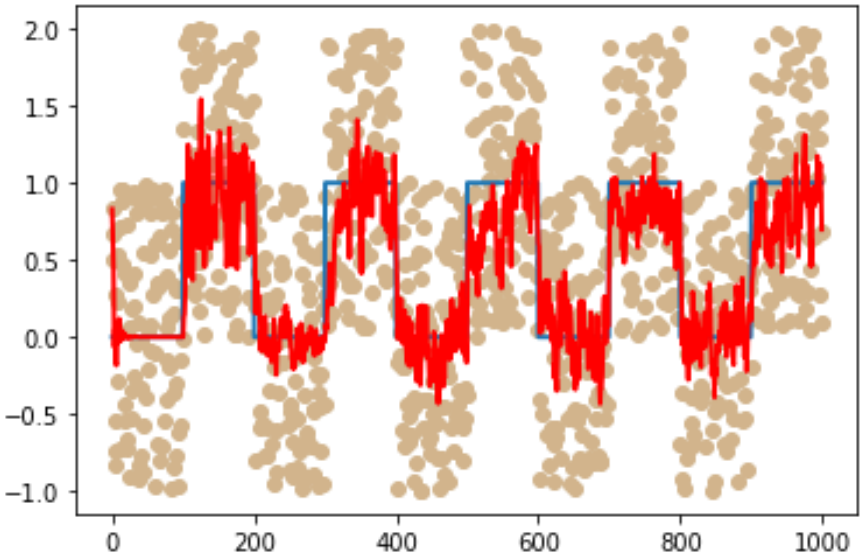



$$SNR_{input} = 0.59$$

$$SNR_{output} = 5.84$$

Рис. 24. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

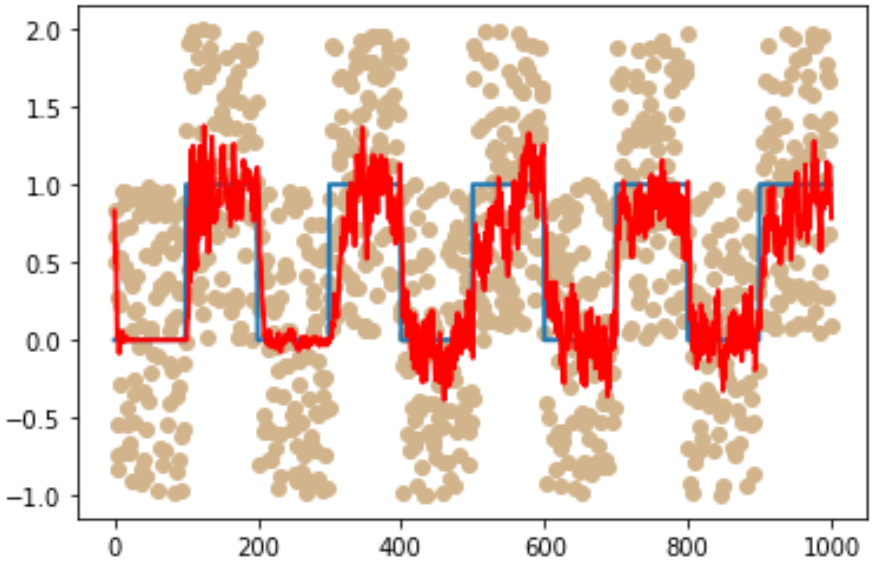
Розглянемо далі тренування нейронних цифрових фільтрів першого та другого порядків на прямокутному сигналі. Різниця між вихідними сигналами обох фільтрів є майже непомітною. Єдиною відмінністю є швидше перемикання фільтра першого порядку між рівнями сигналу, проте фільтр другого порядку, все ж, генерує відфільтрований сигнал з більшим коефіцієнтом SNR за рахунок більш стабільної роботи на постійних ділянках сигналу.




$$SNR_{input} = 1.53$$

$$SNR_{output} = 8.24$$

Рис. 25. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

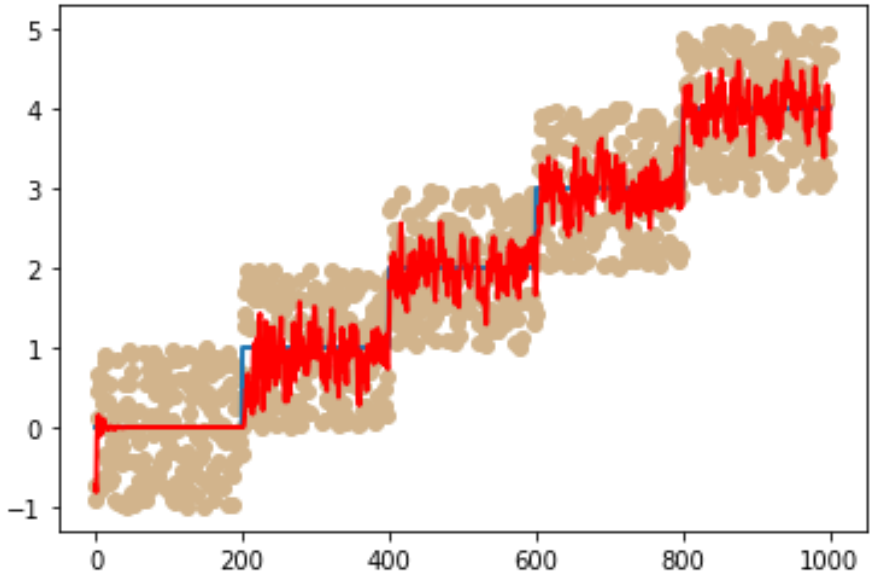



$$SNR_{input} = 1.53$$

$$SNR_{output} = 9.15$$

Рис. 26. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

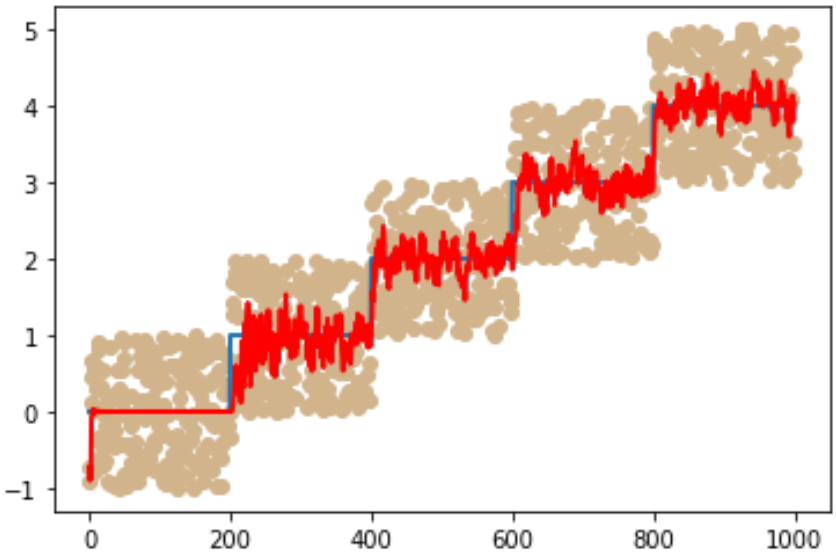
Розглянемо детальніше тренування нейронних цифрових фільтрів першого та другого порядків на сходинковому сигналі. Порівнявши їх, можна знову простежити невелику різницю у швидкості реагування на зміну рівня сигналу. Проте також помітно, що фільтр другого порядку набагато краще придушує шуми на постійних ділянках сигналу. Тут коефіцієнт SNR є дещо спотвореним через зростання абсолютної амплітуди сигналу, проте отримані значення цілком придатні для порівняння фільтрів першого і другого порядків.




$$SNR_{input} = 18.49$$

$$SNR_{output} = 68.68$$

Рис. 27. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.



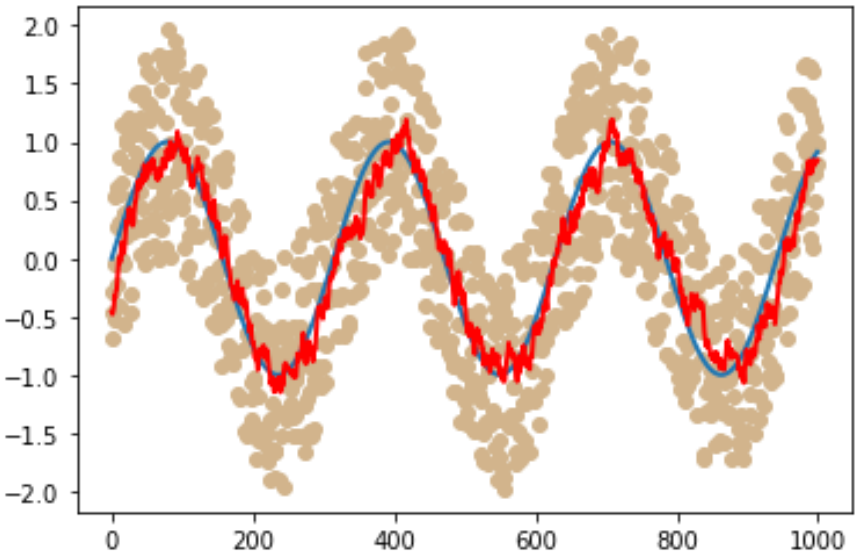

$$SNR_{input} = 18.49$$

$$SNR_{output} = 112.95$$

Рис. 28. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

### 3.2 Порівняння роботи фільтрів

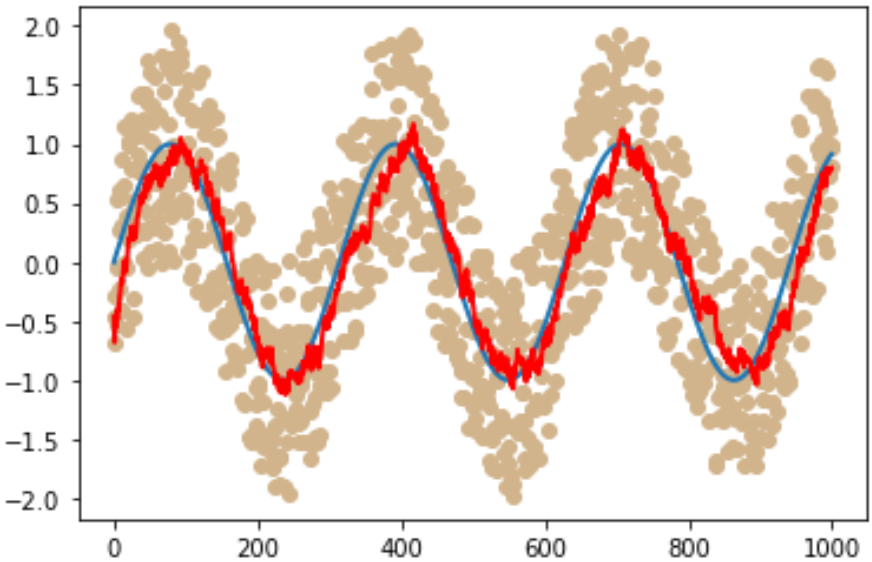
Як вже було згадано раніше, при роботі нейронних цифрових фільтрів, їхні коефіцієнти не оновлюються, що є основною особливістю цього режиму. Порівняємо результати тренувань першого та другого порядків на синусоїдальному сигналі. Хоча на перший погляд вони можуть видатись майже ідентичними, все ж можна простежити фазове зміщення при роботі фільтра другого порядку. Це обов'язково слід враховувати при використанні фільтру.




$$SNR_{input} = 1.45$$

$$SNR_{output} = 12.72$$

Рис. 29. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

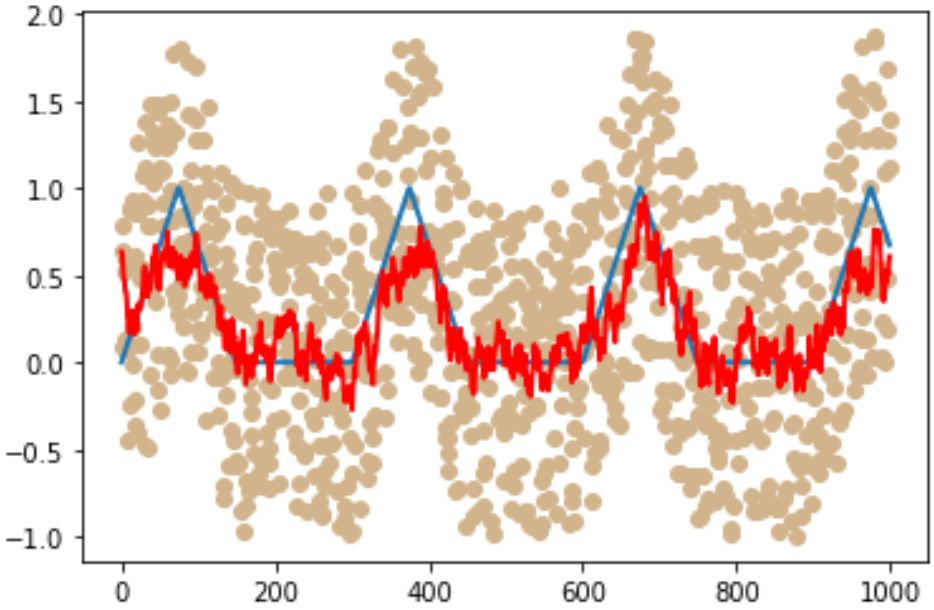



$$SNR_{input} = 1.45$$

$$SNR_{output} = 10.68$$

Рис. 30. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

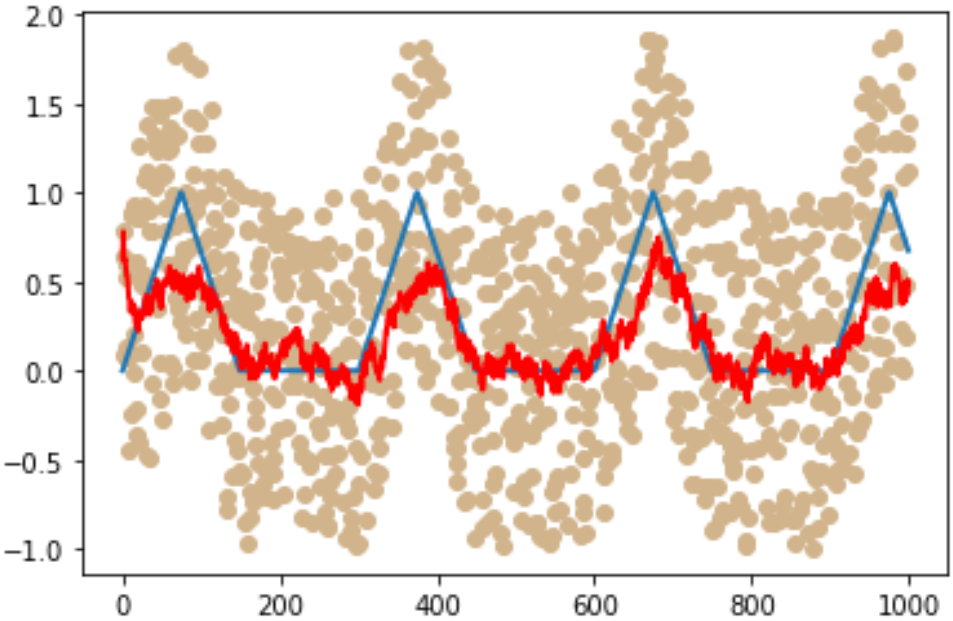
Порівняємо результати тренувань першого та другого порядків на трикутному сигналі. Тут також доволі помітним є фазове зміщення та згасання амплітуди для фільтру другого порядку. Це обов'язково слід враховувати при використанні фільтру з сигналами, що мають невеликі постійні ділянки.




$$SNR_{input} = 0.59$$

$$SNR_{output} = 6.40$$

Рис. 31. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

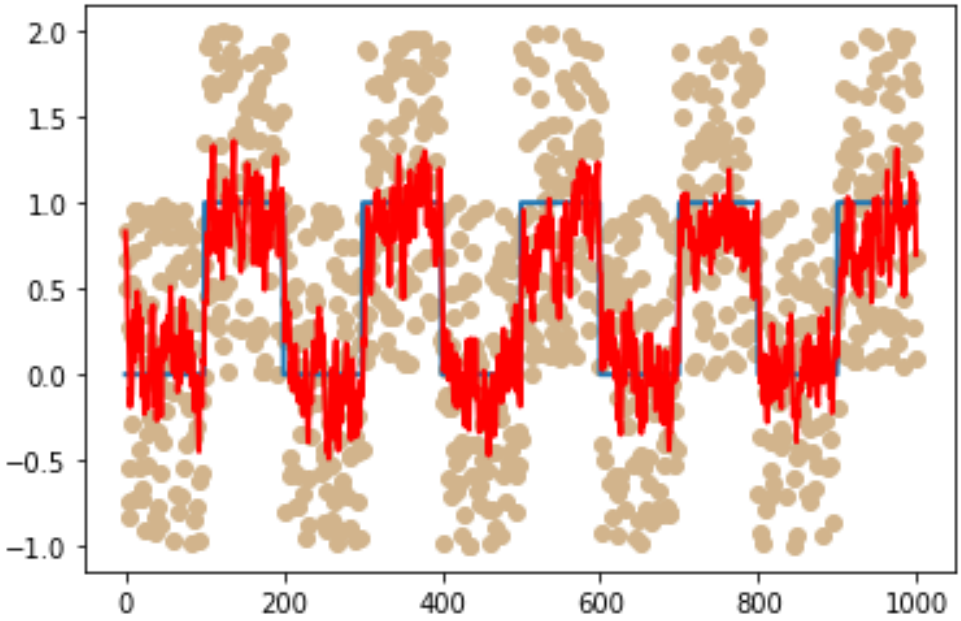



$$SNR_{input} = 0.59$$

$$SNR_{output} = 4.73$$

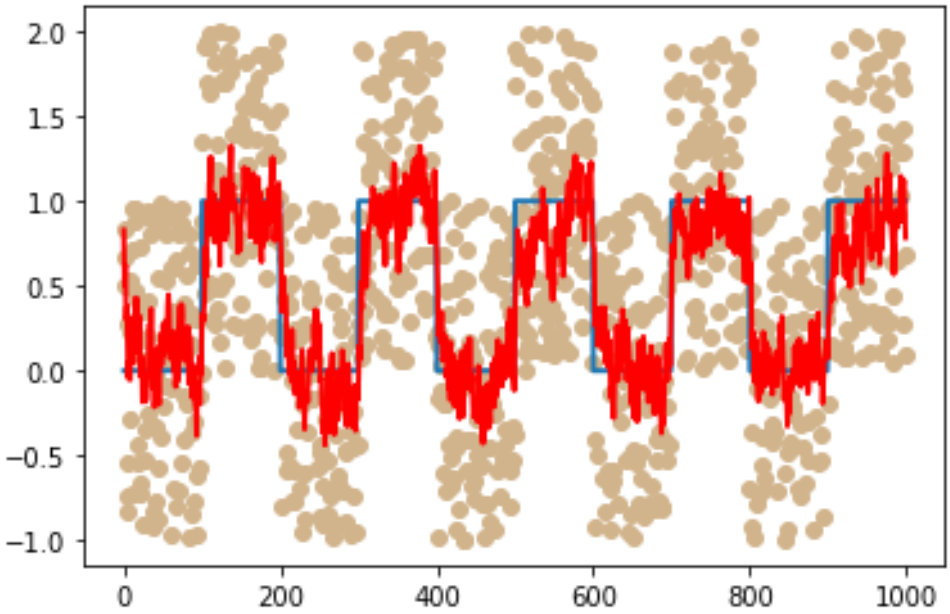
Рис. 32. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

Порівняємо результати тренувань першого та другого порядків на прямокутному сигналі. Хоча на перший погляд вони можуть видатись майже ідентичними, тут також можна простежити фазове зміщення при роботі фільтра другого порядку. Тим не менш, вихідний сигнал цього фільтру має більший SNR завдяки постійним ділянкам сигналу.




$$SNR_{input} = 1.53$$
$$SNR_{output} = 8.28$$

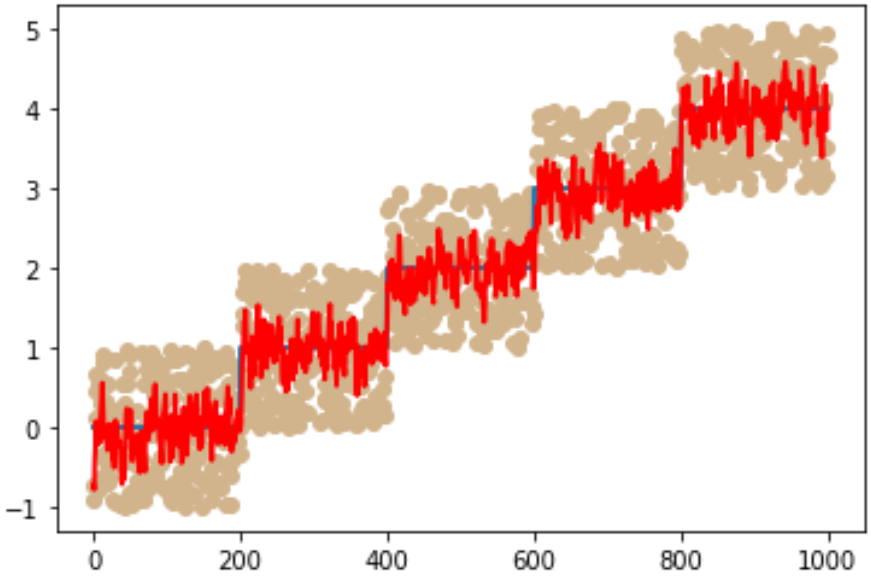
Рис. 33. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.




$$SNR_{input} = 1.53$$
$$SNR_{output} = 9.41$$

Рис. 34. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

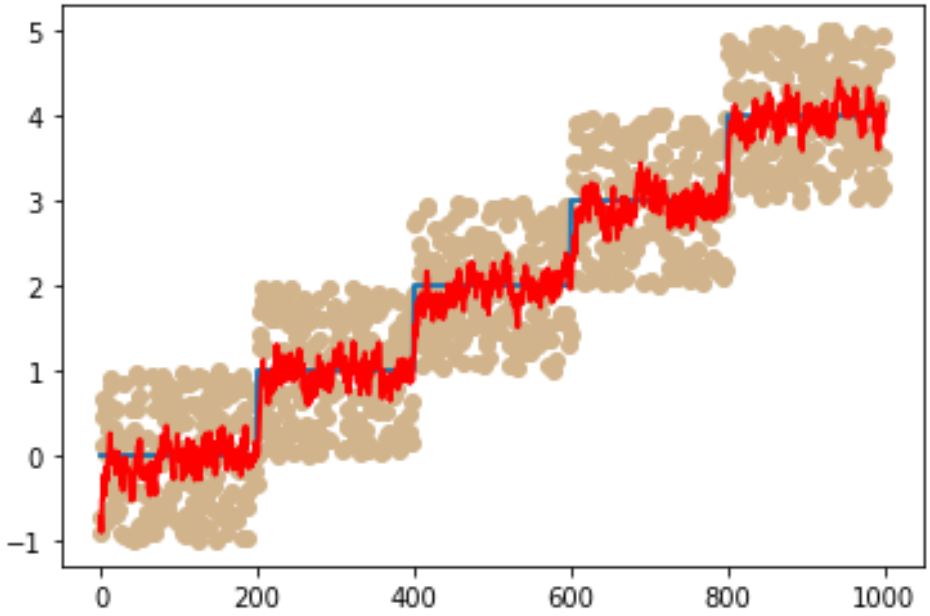
Порівняємо результати тренувань першого та другого порядків на сходинковому сигналі. Як і на етапі тренування, тут чітко простежується невелике фазове зміщення і краще фільтрування сигналу на постійних ділянках.




$$SNR_{input} = 18.49$$

$$SNR_{output} = 63.97$$

Рис. 35. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.




$$SNR_{input} = 18.49$$

$$SNR_{output} = 104.98$$

Рис. 36. Чистий сигнал(синім), зашумлений сигнал(сірим), вихід фільтра(червоним) та значення SNR для вхідного та вихідного сигналу.

З отриманих значень коефіцієнтів SNR для вхідного та вихідного сигналу для різних типів сигналів та візуально можна зробити висновок про те, що фільтри першого і другого порядку ефективно фільтрують вхідний сигнал. Тим не менш, для обох фільтрів результати дещо різні: фільтр першого порядку краще реагував на зміни значення сигналу, в той час як фільтр другого порядку краще відпрацьовував на постійних ділянках сигналів.

### 3.3 Порівняння імпульсних характеристик фільтрів

Імпульсна характеристика фільтра є ще однією властивістю, на яку слід звертати увагу при оцінці якості фільтра. Чим довше спадає імпульсна характеристика, тим більший вплив на його вихідний сигнал матимуть попередні вихідні значення, а отже фільтр буде менш сприйнятливий до різких змін вхідного сигналу. Розглянемо імпульсні характеристики для фільтра першого (ліворуч) та другого (праворуч) порядків після тренування на різних типах сигналів:

- Синусоїдальний сигнал

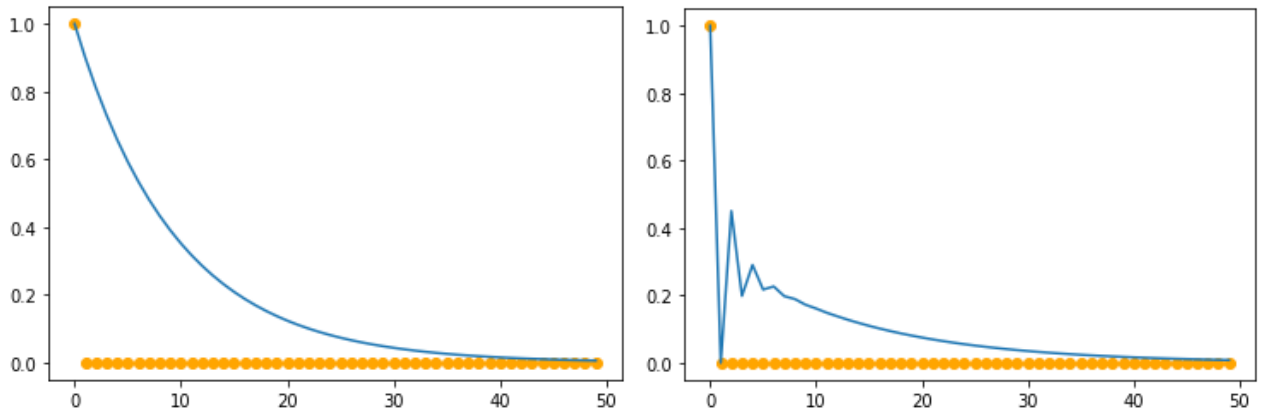



Рис. 37. Вихідний сигнал фільтра(синім) та вхідний сигнал фільтра (оранжевим).

- Трикутний сигнал

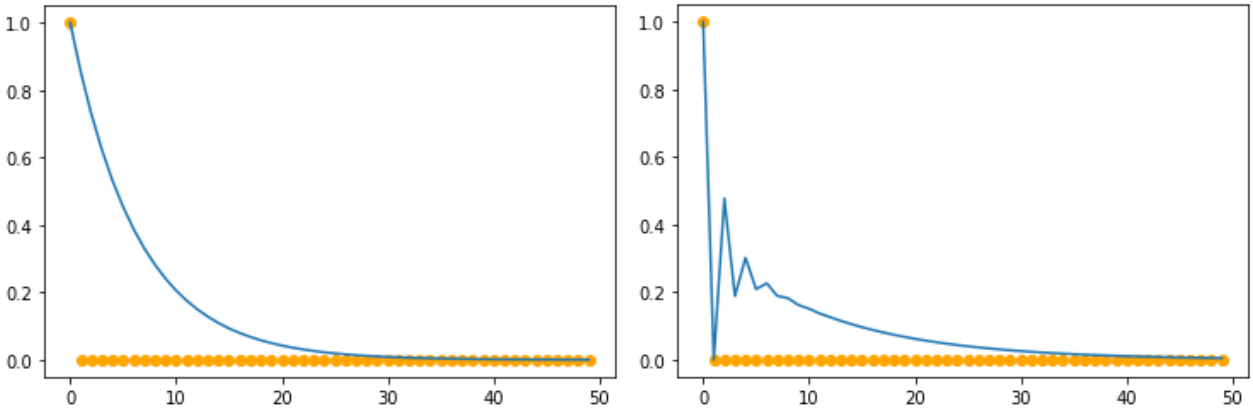



Рис. 38. Вихідний сигнал фільтра(синім) та вхідний сигнал фільтра (оранжевим).

- Прямокутний сигнал

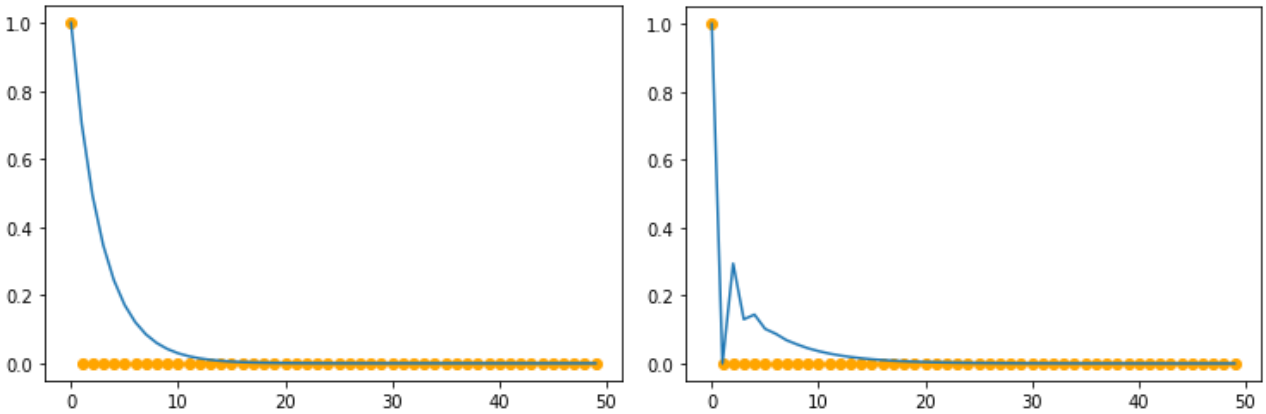



Рис. 39. Вихідний сигнал фільтра(синім) та вхідний сигнал фільтра (оранжевим).

- Сходинковий сигнал

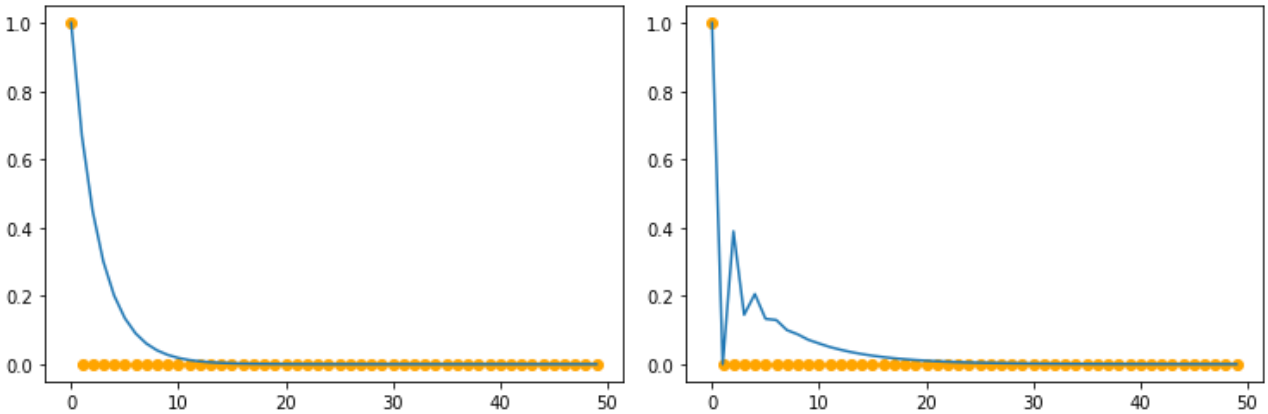



Рис. 40. Вихідний сигнал фільтра(синім) та вхідний сигнал фільтра (оранжевим).

Проаналізувавши отримані імпульсні характеристики, можна помітити, що у фільтра першого порядку вона є гладкою, а у фільтра другого порядку дещо ламаною. Це може дозволити останньому більш складно реагувати на різноманітні викиди або різкі зміни сигналу при правильному підборі коефіцієнтів фільтра. Цього досягти можна вдалим вибором тренувальних даних та правильним проведенням тренування нейронного цифрового фільтра.

## Висновки

В ході виконання курсової роботи було розроблено та реалізовано моделі адаптивних цифрових фільтрів, що ґрунтуються на дискретизованих моделях фільтрів першого та другого порядку, із використанням елементів рекурентних нейронних мереж. При розробці таких фільтрів було використано структурні елементи рекурсивних цифрових фільтрів та нейронних мереж задля покращення якості роботи при вирішенні задач фільтрації сигналів за певним зразком. Перевірка роботи та аналіз отриманих результатів показує, що побудовані рекурсивні цифрові фільтри є достатньо ефективними для застосування їх для деяких реальних сигналів та подальшої розробки. Принципи роботи побудованих цифрових фільтрів відтворюють ідеї аналогових фільтрів першого та другого порядків. Однак, реалізація адаптивного цифрового фільтра із використанням елементів рекурентних нейронних мереж є набагато простішою та зрозумілішою, що забезпечує меншу вартість розробки, більшу здатність до модифікації та майбутнього доповнення схеми побудови фільтра.

Подальший розвиток розробленого адаптивного цифрового фільтра може вестись у напрямку використання складніших рекурентних цифрових фільтрів та використання складніших нейронних структур, що можуть дозволити більш гнучко налаштовувати фільтр та виділяти неочевидні ознаки та складові сигналу.

## Список використаних джерел


1. Комп’ютерне моделювання систем та процесів. URL: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/2kvetnyj_komp'yuterne_modelyuvannya_system_procesiv/t2/17..htm (дата звернення: 02.05.2023).
2. Цифрова фільтрація сигналів. URL: https://learn.ztu.edu.ua/pluginfile.php/83645/mod_resource/content/0/L11%20-%20Цифрова%20фільтрація%20сигналів.%20Нерекурсивні%20ЦФ.pdf (дата звернення: 02.05.2023).
3. Фільтрація та передавання даних URL: https://kivra.kpi.ua/wp-content/uploads/file/discipline/AOTI/AOTI_2_4-5.pdf (дата звернення: 01.05.2023).
4. Simon Haykin. Kalman filtering and Neural networks. McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada: 2004. 69-80 с.
5. Neural Network URL: https://www.investopedia.com/terms/n/neuralnetwork.asp (дата звернення: 03.05.2023)
6. Нейронні мережі - шлях до глибинного навчання URL: https://codeguida.com/post/739 (дата звернення: 03.05.2023).
7. Любунь З. Основи теорії нейромереж. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка. 200X. 9 с.
8. Чернодуб А. Навчання динамічних нейронних мереж на задачах довгострокового прогнозування. : дис. кандидат технічних наук. 2016. 14-41 с.
9. Mohamed Najim. Digital Filters Design for Signal and Image Processing. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. 2006. 173-186 с.
10. C. Britton Rorabaugh. Digital Filter Designer’s Handbook. TAB Books Division of McQraw-Hill, Inc. Blue Ridge Summit, PA 17294-0850. 1993. 271-279 с.
11. Steve Winder. Analog and Digital Filter Design. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. 2002. 51 с.
12. Terrell, Trevor J. Introduction to Digital Filters. New York: MacMillan Press, 1980. 46-56 с.
13. Antoniou, Andreas. Digital Filters: Aizaljisis, Design, and Applications. New York: McGraw-Hill, 1993. 171 с.
14. R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md. 1960.

15. Oguz Bektas, Jeffrey A. Jones, Shankar Sankararaman, Indranil Roychoudhury, Kai Goebel. A neural network filtering approach for similarity-based remaining useful life estimation. 30 жовтня 2018.

16. Yan Pei, Donald S. Fussell, Swarnendu Biswas, Keshav Pingali. An Elementary Introduction to Kalman Filtering. University of Texas at Austin. 2019.

17. Bryan Lim, Stefan Zohren, Stephen Roberts. Recurrent Neural Filters: Learning Independent Bayesian Filtering Steps for Time Series Prediction. Oxford-Man Institute of Quantitative Finance, Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford, UK. 27 вересня 2020.

18. Guy Revach, Nir Shlezinger, Xiaoyong Ni, Adri`a L´opez Escoriza, Ruud J. G. van Sloun, Yonina C. Eldar. KalmanNet: Neural Network Aided Kalman Filtering for Partially Known Dynamics. 24 січня 2022.

19. Z. Liubun, V. Nesterenko, V. Mandziy, O. Karpin: Implementation of digital filters using neural networks when the object movement dynamics are not known. 21 жовтня 2022.

20. Технічна енциклопедія TechTrend URL: http://techtrend.com.ua/index.php?newsid=26006013 (дата звернення: 13.05.2023).

# Додатки

https://colab.research.google.com/drive/1qFPComZRSnqnf86lcHPEiWhBNm41C3x2?usp=sharing